DEVOIR N° 2 DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

Exercice 1 : **6 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : **(0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,75 + 0,75 + 1 = 4pt)**

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ **b)** $3x^2 - 8|x| = -4$ **c)** $\sqrt{x^2 - 9} + x = 9$

d) $2\sqrt{x(x-3)} < 2x + 2$ **e)** $\sqrt{2x^2 + x + 1} > \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$ **f)** $\sqrt{2 - x} \geq x + 4$

2. **a**. Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré 2 qui s'annule en 0 tel que pour tout réel x on a $P(x+1) - P(x) = x$. **(1pt)**

b. En déduire que : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. **(1pt)**

Exercice 2 : **6 points**

On considère l'équation (E_m) : $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de m, (E_m) est du second degré. **(0,5pt)**

Pour la suite, on suppose que $m \neq 1$.

2. Pour quelles valeurs de m (E_m) admet : **(1 + 1 + 1 = 3pt)**

a. Deux solutions de signes contraires. **b.** Deux solutions de négatives. **c.** Deux solutions opposées.

3. Déterminer m pour que 2 soit une solution de (E_m). Trouver l'autre solution de (E_m). **(0,5 + 0,5 = 1pt)**

4. Dans le cas où (E_m) admet deux solutions distinctes x' et x'', trouver une relation indépendante de m liant x' et x'' . **(1,5pt)**

Exercice 3 : **8 points**

On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de racine évidente -3 vérifiant : $P(-1) = -12$; $P(2) = 15$.

1. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système (S) $\begin{cases} -27x + 9y - 3z = 3 \\ -x + y - z = -9 \\ 8x + 4y + 2z = -12 \end{cases}$ **(1,5pt)**

2. **a**- sachant que $P(0) = -3$, montrer que $d = -3$. **(0,5pt)**

b- Montrer que les réels a, b et c vérifient le système (S) **(1pt)**

c- En déduire que $P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$. **(0,5pt)**

d- Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré. **(1pt)**

e- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $P(x-1) = 0$ et $P(1-x) \leq 0$. **(1 + 1,5 = 2,5pt)**

3. En utilisant le système (S), résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$(S') \begin{cases} -27(x-1) + \frac{9}{y} - 3z^2 = 3 \\ -(x-1) + \frac{1}{y} - z^2 = -9 \\ 8(x-1) + \frac{4}{y} + 2z^2 = -12 \end{cases}$$ **(1pt)**

BONNE CHANCE !! !! !!